Análise Combinatória e Regras de Contagem

Fatorial

- <u>Definição</u>: Sendo n um número inteiro maior que 1, define-se fatorial de n como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 a n.

- <u>Representação</u>: n!

- <u>Lê-se</u>: “n fatorial” ou “fatorial de n”

Ex 01) $4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

Ex 02) $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

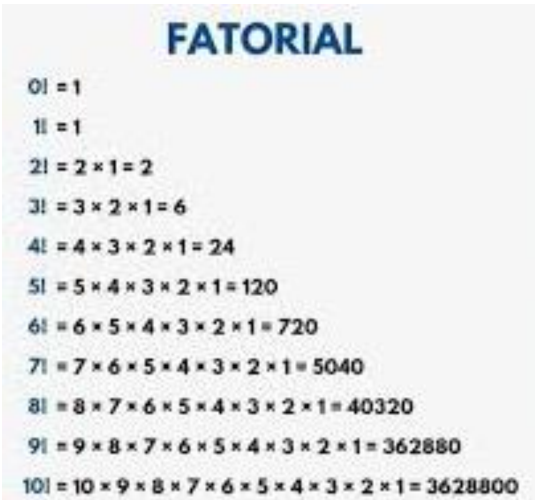
Ex 03) $8! = 8 * 7 * 6 * 5 * 4!$

Ex 04) $\frac{8!}{4!} = \frac{8*7*6*5*4!}{4!} = 1680$

Ex 05) $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 1$

Ex 06) $(n - 1)! = (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * \dots * 1$

Ex 07) $(n + 1)! = (n + 1) * n * (n - 1) * \dots * 1$



FATORIAL

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

Princípio Multiplicativo/Fundamental da Contagem

- Definição: Técnica matemática que permite calcular o número de maneiras que elementos podem ser combinados, independentes entre si

- Representação: $\frac{qtdElemento1}{elemento\ 1} * \frac{qtdElemento2}{elemento\ 2} * \frac{qtdElemento3}{elemento\ 3} * \ldots$

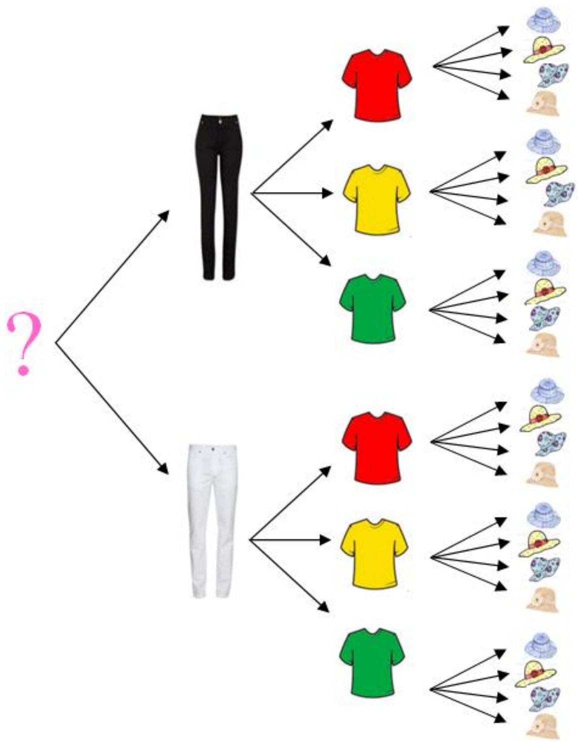
- Dica: Quando temos elementos citados e separados por **E**, multiplicamos.
  Caso contrário, se forem citados ou separados por **Ou**, adicionamos.

Ex 01) João tem quatro camisetas (azul, verde, amarela e branca) e duas calças (preta e cinza),. De quantas formas diferentes ele poderá se vestir ao usar uma camiseta e uma calça?

$$\frac{4}{camisetas} * \frac{2}{calças} = 8\ maneiras\ diferentes$$

Ex 02) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. De quantas formas diferentes uma pessoa realizar um pedido, considerando que ela deseja comer uma opção de cada?

$$\frac{2}{saladas} * \frac{4}{carnes} * \frac{5}{bebidas} * \frac{3}{sobremesas} = 120\ formas\ diferentes$$



Arranjo

- Definição: Cálculo das diferentes formas de se organizar os elementos de um determinado conjunto.

- Fórmula matemática: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
  - ✓ n: n° de elementos do conjunto
  - ✓ p: elementos escolhidos para agrupar

- Dica: **A ordem dos elementos importa**, **n° de elementos ≠ n° de posições** e nem sempre é necessário utilizar a fórmula, pois apenas com a técnica do princípio multiplicativo podemos resolver uma questão.

Ex 01) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 * 4 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60\ números$$

Ex 02) Quantos números de 4 algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

$$\frac{9}{dígito\ 1} * \frac{9}{dígito\ 2} * \frac{8}{dígito\ 3} * \frac{7}{dígito\ 4} = 4536\ números$$

Permutação

- Definição: Cálculo das formas diferentes de se permutar/trocar os elementos de um determinado conjunto.

- Permutação sem repetição de elementos: $P_n = n!$
  - ✓ n: n° de elementos do conjunto

- Permutação com repetição de elementos: $P_n^{k,l,m} = \frac{n!}{k!\,l!\,m!}$
  - ✓ n: n° de elementos do conjunto
  - ✓ k, l, m: número de vezes que os elementos repetem

- Dica: **A ordem dos elementos importa**, **n° de elementos** = **n° de posições** e nem sempre é necessário utilizar a fórmula, pois apenas com a técnica do princípio multiplicativo podemos resolver uma questão.

Ex 01) Quantos anagramas tem as palavras

a) UVA
$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6\ anagramas$

b) ARARA

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{5*4*3*\cancel{2!}}{3*2*1*\cancel{2!}} = \frac{60}{6} = 10\ anagramas$$

Ex 02) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados por 1, 2, 3, 5 e 8?

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120\ números$$

Ex 03) Uma caixa contém 8 bolas, as quais 5 são azuis e 3 são verdes. De quantas maneiras é possível retirar uma a uma dessa caixa?

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\ *\ 3!} = \frac{8 * 7 * 6 * \cancel{5!}}{\cancel{5!} * 3 * 2 * 1} = \frac{336}{6} = 56\ maneiras$$

Combinação

- <u>Definição</u>: Cálculo das diferentes formas de selecionar um grupo a partir de elementos.

- <u>Combinação sem repetição</u>: $\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
  - ✓ n: n° de elementos do conjunto
  - ✓ p: agrupamentos desejados a partir do n° de elementos

- <u>Combinação com repetição</u>: $\binom{n+p-1}{p} = C_{n,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$
  - ✓ n: n° de elementos do conjunto
  - ✓ p: agrupamentos desejados a partir do n° de elementos

- <u>Dica</u>: **A ordem dos elementos <u>não</u> importa** e atentar-se a palavras como**: grupos, agrupamentos, conjuntos, equipes, comissões etc.**

Ex 01) Quantas comissões de 3 participantes podem ser formados com 5 pessoas?

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{5 * 4 * \cancel{3!}}{\cancel{3!} * 2 * 1} = \frac{20}{2} = 10\ comissões$$

Ex 02) Em uma empresa, há 6 sócios brasileiros e 4 sócios chineses. A diretoria será composta por 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 chineses. De quantas formas essa composição poderá ocorrer?

I) Calculando os grupos de sócios brasileiros possíveis

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3! * 3!} = \frac{6 * 5 * 4 * \cancel{3!}}{\cancel{3!} * 3 * 2 * 1} = \frac{120}{6} = 20\ grupos\ BR$$

II) Calculando os grupos de sócios japoneses possíveis

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2! * 2!} = \frac{4 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2!} * 2 * 1} = \frac{12}{2} = 6\ grupos\ JP$$

III) Calculando o total de formas dessa composição de grupos ocorrer

$$\frac{20}{BR} * \frac{6}{JP} = 120\ formas$$

Princípio da Casa dos Pombos/Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Definição: Se n pombos forem colocados m casas, e n>m, então pelo menos uma casa conterá mais de um pombo.

- Dica: Atentar-se a palavras como**: certeza, garantir, pelo menos, no mínimo, etc.**

Ex 01) Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que pelo menos duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

Como há 12 meses em um ano, podemos considerar esses meses como as "caixas" onde cada pessoa ficará. Se tivermos 13 pessoas, garantimos que pelo menos duas ficarão juntas nessa mesma caixa, ou seja, farão aniversário no mesmo mês.

Ex 02) Qual deve ser o número mínimo de convidados em uma festa para garantir que pelo menos dois deles façam aniversário no mesmo dia?

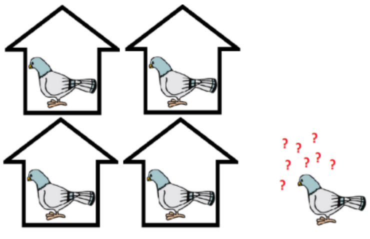
Considerando que, no pior caso, todos os convidados façam aniversário em um ano bissexto, com 366 dias, o número mínimo de convidados em uma festa que garante que pelo menos dois deles façam aniversário no mesmo dia é 367 convidados, uma vez que teremos mais convidados do que quantidade de dias em um ano bissexto.

Ex 03) Dentro de uma gaveta, há nove meias brancas, quatro meias pretas e seis meias azuis. Qual a quantidade mínima de meias que preciso tirar dessa gaveta para garantir que terei pelo menos duas meias de cores diferentes?

No pior caso, pegamos todas as meias da cor que possui a maior quantidade, no caso as nove meias brancas. A próxima cor será obrigatoriamente ou preta ou azul, uma vez que se esgotaram todas as nove meias brancas, ou seja, será necessário tirar 10 meias desta gaveta para garantir que terei ao menos duas cores distintas.

Ex 04) Em uma prateleira, há 35 discos de Heavy Metal, 40 discos de Jazz e 25 discos de Country. Qual a quantidade mínima de discos que preciso tirar da prateleira para garantir que escolhi ao menos um disco de Heavy Metal?

Considerando a pior hipótese, eu tirarei 40 discos de Jazz e 25 discos de Country, contabilizando 65 discos dos dois estilos. Entretanto, para eu garantir que escolhi ao menos um disco de Hevy Metal, será necessário tirar mais um disco, ou seja, 66 discos no total.



Binômio de Newton

- Definição: Forma de desenvolver um binômio
- Representação: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
  - ✓ K: termo em n desejado
- Dica: Para desenvolver um binômio qualquer, basta desenvolver a linha referente ao seu expoente no triângulo de pascal. Cada número dela será a constante que multiplica cada termo a e b do binômio. Sendo que o termo a começa com o valor do expoente (irá decrementando em 1 em seu expoente) e o termo b começa em 0 (irá acrescentando em 1 em seu expoente)

Ex 01) Desenvolva o binômio $(a+b)^5$ utilizando o Triângulo de Pascal

I) Desenvolvendo o triângulo de pascal até a 5° linha (número da potência), a partir da linha 0

1 5 10 10 5 1 -> Linha 5 do Triângulo de Pascal

II) Desenvolvendo o binômio $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 = \mathbf{1}a^5b^0 + \mathbf{5}a^4b^1 + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}a^1b^4 + \mathbf{1}a^0b^5$$

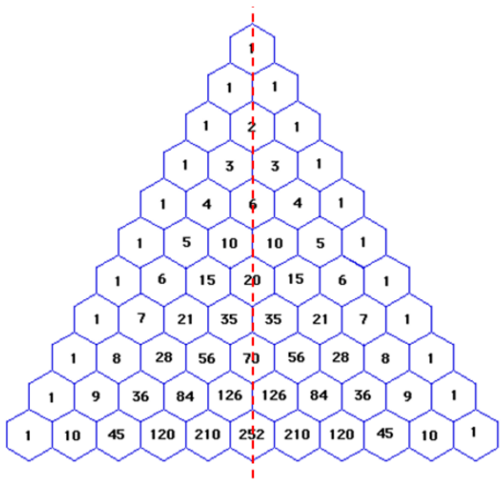
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Ex 02) Qual o coeficiente de x^7 em $(1+x)^{21}$?

$$(1+x)^{21} = \sum_{k=7}^{21} \binom{21}{7} 1^{21-7} x^7$$

$$\binom{21}{7} = \frac{21!}{7!\,(21-7)!} = \frac{21!}{7!\,14!} = \frac{21*20*19*18*17*16*15*\cancel{14!}}{7*6*5*4*3*2*1*\cancel{14!}} = 116280$$

Portanto, o coeficiente de x^7 em $(1+x)^{21}$ é 116280.



Exercícios Resolvidos: Análise Combinatória

Ex01) Tenho 8 camisetas, 4 calças e 3 pares de tênis. De quantas maneiras diferentes consigo me vestir?

$$\frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{Camisetas}} * \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{Calças}} * \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{Pares\ de\ tênis}} = \mathbf{96}\ \boldsymbol{maneiras\ diferentes}$$

Ex02) Um edifício possui 32 andares, com 25 escritórios por andar. Qual o número de escritórios desse edifício?

$$\frac{\mathbf{32}}{\boldsymbol{andares}} * \frac{\mathbf{25}}{\boldsymbol{escritórios}} = \mathbf{800}\ \boldsymbol{escritórios\ no\ total}$$

Ex03) Quero criar uma senha que utilize apenas as letras do alfabeto (maiúsculas ou minúsculas) ou números do teclado. Quantas são as combinações possíveis para um dígito?

$$\frac{\mathbf{26}}{\boldsymbol{letras\ maiúsculas}} + \frac{\mathbf{26}}{\boldsymbol{letras\ minúsculas}} + \frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{dígitos\ numéricos}} = \mathbf{62}\ \boldsymbol{combinações}$$

Supondo ainda que o enunciado deu um comprimento n em caracteres para a senha, ficaria:

$$\frac{\mathbf{62}}{\boldsymbol{Dígito\ 1}} * \frac{\mathbf{62}}{\boldsymbol{Dígito\ 2}} * \frac{\mathbf{62}}{\boldsymbol{Dígito\ 3}} * \ldots * \frac{\mathbf{62}}{\boldsymbol{Dígito\ n}} = \mathbf{62}^{\boldsymbol{n}}\ \boldsymbol{senhas\ possíveis}$$

Ex04) Uma vigem de Belo Horizonte a São Paulo possui três caminhos possíveis.
De São Paulo à Curitiba são dois caminhos possíveis.
Por fim, de Curitiba à Florianópolis são três caminhos possíveis.
Entretanto, há dois atalhos de São Paulo que levam diretamente à Florianópolis.
Determine as o número total de trajetos possíveis para viajar a Curitiba.

$$\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{BH \to SP}} * \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{SP \to CWB}} * \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{CWB \to FLN}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{BH \to SP}} * \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{SP \to FLN}} = \mathbf{24}\ \boldsymbol{possibilidades}$$

Ex05) Utilizando os dígitos: 0, 1, 3, 6, 7, 8 e 9, determine:

a) Quantos números com três dígitos são possíveis formar?

$$\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{c}} * \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{d}} * \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{u}} = \mathbf{294}\ \boldsymbol{números}$$

Note: no dígito respectivo à centena, não podemos utilizar o número 0 para formar números de três dígitos, pois 071 por exemplo só possui 2 dígitos, sendo escrito apenas 71. Entretanto, nos dígitos de dezena e unidade qualquer número se encaixa no proposto, repetido ou não.

b) Quantos números pares com três dígitos são possíveis formar?

$$\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{c}} * \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{d}} * \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{u}} = \mathbf{126}\ \boldsymbol{números}$$

Note: no dígito respectivo à unidade, só serão contados os números pares entre os especificados, que no caso serão: 0, 6 e 8

c) Quantos números com três dígitos distintos são possíveis formar?

$$\frac{6}{c} * \frac{6}{d} * \frac{5}{u} = 180\ números$$

Note: No dígito da centena, o zero não pode ser utilizado para garantir que o número seja de três dígitos, mas todos os outros dígitos são válidos. Para o dígito da dezena, já foi escolhido um dos números listados, portanto, restam apenas 6 opções, no entanto, o zero passa a ser uma opção válida a partir daqui. Por fim, para o dígito da unidade, dois números já foram usados, deixando apenas 5 opções disponíveis.

Ex06) Tenho 5 pessoas, de quantas formas posso organizá-las em filas diferentes?

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120\ formas$$

Ex07) De quantas maneiras distintas 10 pessoas podem sentar em um sofá com 3 lugares?

$$\frac{10}{sofá\ 1} * \frac{9}{sofá\ 2} * \frac{8}{sofá\ 3} = 720\ maneiras$$

Ex08) Quantos anagramas tem a palavra AMOR?

$$P_4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24\ anagramas$$

Ex09) Quantos anagramas tem a palavra ANNA?

$$P4^{2,\ 2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2!}\ 2 * 1} = \frac{12}{2} = 6\ anagramas$$

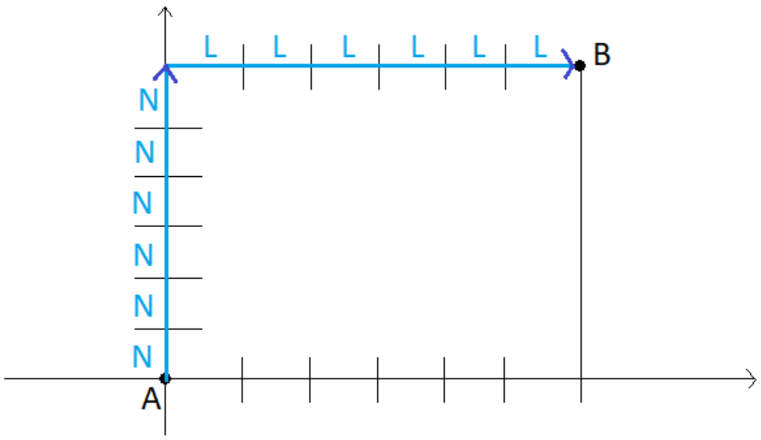
Ex10) Uma Inteligência Artificial precisa determinar as possibilidades de caminhos do ponto A ao B, ajude-a.

I) Escolhendo um caminho: NNNNNNLLLLLL

Total de elementos: 12

N: 6 vezes repetidas

L: 6 vezes repetidas



II) Calculando as possibilidades de caminhos

$$P12^{6,\ 6} = \frac{12!}{6!\ 6!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * \cancel{6!}}{\cancel{6!} * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = \frac{665280}{720} = 924\ possibilidades$$

Ex11) De quantas maneiras distintas 10 pessoas podem sentar em um sofá com 3 lugares?

$$A_{10,\ 3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 * 9 * 8 * \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720\ maneiras$$